

MATEMATIKA 2

Lekcija 1- Neodređeni integral

Primitivna funkcija. U diferencijalnom računu smo nalazili izvod $f'(x)$ date funkcije $f(x)$. Sada ćemo rešavati obrnuti (inverzni) problem: nalazićemo funkciju $f(x)$ ako je dat njen izvod $f'(x)$. Oblast matematike koja se bavi rešavanjem takvog problema zove se integralni račun.

Funkcija $F(x)$ je primitivna funkcija za funkciju $f(x)$ na konačnom ili beskonačnom otvorenom intervalu (a, b) ako je $F(x)$ diferencijabilna u svakoj tački iz (a, b) i $F'(x) = f(x)$ ili, ekvivalentno, $dF(x) = f(x) dx$ za svako $x \in (a, b)$.

Ako je $F(x)$ primitivna funkcija za $f(x)$ na (a, b) onda je to i $G(x) = F(x) + C$, gde je C proizvoljna konstanta. Zaista, $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x)$ za svako $x \in (a, b)$. Znači, ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju na (a, b) onda $f(x)$ ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija na (a, b) .

Koristeći Lagranžovu teoremu može se pokazati da se bilo koje dve primitivne funkcije jedne iste funkcije razlikuju za konstantu.

Neodređeni integral. Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ na intervalu (a, b) zove se neodređeni integral od $f(x)$ na (a, b) i zapisuje kao $\int f(x) dx$. Simbol \int se zove integralni znak, izraz $f(x) dx$ zove se element integraljenja, funkcija $f(x)$ se zove integrand i x se zove promenljiva integraljenja.

Ako je $F(x)$ bilo koja primitivna funkcija za $f(x)$ na intervalu (a, b) tada je na osnovu gore rečenog

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Prirodno je pitati koja funkcija ima primitivnu, tj. neodređeni integral. Odgovor nam daje:

Teorema 1. Svaka neprekidna funkcija na (a, b) ima primitivnu funkciju, tj. neodređeni integral.

Operacija nalaženja primitivne funkcije, odnosno neodređenog integrala date funkcije $f(x)$ zove se integraljenje funkcije $f(x)$. Ta operacija je inverzna operaciji diferenciranja.

Osobine neodređenog integrala. U nastavku ćemo pretpostaviti da su sve funkcije sa kojima radimo neprekidne na (a, b) , dakle da svaka od njih ima neku primitivnu funkciju, tj. neodređeni integral. Za njih imamo:

(1) Element integraljenja funkcije jednak je diferencijalu neodređenog integrala, tj.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx.$$

(2) Integrand je jednak izvodu neodređenog integrala, tj.

$$\left(\int f(x) dx\right)' = f(x).$$

(3) Neodređeni integral diferencijala neke funkcije razlikuje se od te funkcije za proizvoljnu konstantu:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

(4) Ako je integrand pomnožen konstantnim faktorom onda je i neodređeni integral pomnožen tim faktorom:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (k \text{ je konstanta i } k \neq 0).$$

(5) Neodređeni integral zbira (razlike) dve funkcije jednak je zbiru (razlici) neodređenih integrala tih funkcija:

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Tablični integrali

Formula $F'(x) = f(x)$ može se zameniti ekvivalentnom formulom $\int f(x) dx = F(x) + C$ gde je C proizvoljna konstanta. To nam omogućuje da formiramo tablicu osnovnih neodređenih integrala:

$$\begin{aligned} \int x^\alpha dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; \quad \int x^{-1} dx = \ln|x| + C; \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C; \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C; \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C; \\ \int e^x dx &= e^x + C; \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad 1 \neq a > 0; \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C; \\ \int \frac{1}{1-x^2} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C; \quad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + C. \end{aligned}$$

(Dokaz — na vežbama AG).

Između operacija diferenciranja i integralenja razlika je u tome što je izvod elementarne funkcije elementarna funkcija, dok primitivna funkcija ne mora biti. Ustanovljeno je da, na primer, sledeći neodređeni integrali

$$\int e^{-x^2} dx, \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x},$$

nisu sastavljeni od elementarnih funkcija. Oni postoje jer su integrandi neprekidne funkcije.

Metode integraljenja

Integraljenje smenom. Oblik podintegralne funkcije i pravilo za izvod složene funkcije često dozvoljavaju svođenje datog integrala na jednostavniji integral. Tako, ako funkcija $x = g(t)$ ima neprekidan prvi izvod i inverznu funkciju $t = h(x)$, tada integral $\int f(x) dx$ smenom $x = g(t)$, $dx = g'(t) dt$ postaje

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

Jasno, smenom $t = h(x)$ u integralu na desnoj strani poslednje jednakosti dobijamo integral u terminima polazne promenljive x .

Parcijalno integraljenje. Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju neprekidne izvode $u'(x)$ i $v'(x)$, onda važi, na osnovu pravila za diferenciranje proizvoda,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Odatle sledi da je proizvod $u(x)v(x)$ primitivna funkcija za $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Dakle,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)] dx = u(x)v(x) + C.$$

Primenom osobine linearnosti neodređenog integrala, dobijamo formulu

$$\int u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) dx$$

ili

$$\int u dv = uv - \int v du$$

koja se zove formula parcijalnog integraljenja.

Integraljenje racionalne funkcije

Polinomi. Funkcija

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, x \in \mathbb{R},$$

gde su koeficijenti a_j , $j = \overline{0, n}$, realni brojevi, naziva se polinom stepena $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, ako je koeficijent a_n različit od nule.

Dva polinoma su jednaka ako su istog stepena i ako su im koeficijenti uz iste stepene jednaki.

Broj x_0 je nula polinoma $P_n(x)$, ako je $P_n(x_0) = 0$. Ako je broj x_0 nula polinoma $P_n(x)$, koji je racionalan, realan, odnosno, kompleksan broj, tu nulu ćemo zvati racionalnom, realnom, odnosno, kompleksnom nulom tog polinoma.

Osnovni stav algebre. Za svaki polinom stepena $n \in \mathbb{N}$ postoji tačno n (realnih i /ili kompleksnih) nula, među kojima može biti i jednakih.

Ako je x_0 realna nula polinoma $P_n(x)$, tada postoji polinom $Q_{n-1}(x)$ stepena $n-1$, takav da važi $P_n(x) = (x - x_0) Q_{n-1}(x)$.

Broj $x_0 \in \mathbb{R}$ je realna nula m -tog reda polinoma $P_n(x)$, ako postoji polinom $R_{n-m}(x)$ stepena $n-m$, takav da je $R_{n-m}(x_0) \neq 0$ i da je

$$P_n(x) = (x - x_0)^m R_{n-m}(x).$$

Uopšte, svaki se polinom $P_n(x)$ stepena n može na jedinstven način napisati kao proizvod

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_r)^{m_r} \cdot (x^2 + b_1 x + c_1)^{l_1} \cdots (x^2 + b_s x + c_s)^{l_s},$$

gde za prirodne brojeve m_j , $j = \overline{1, r}$, i prirodne brojeve l_k , $k = \overline{1, s}$, važi

$$m_1 + \cdots + m_r + 2(l_1 + \cdots + l_s) = n,$$

a za realne brojeve b_j, c_j , $j = \overline{1, s}$, važi $b_j^2 - 4c_j < 0$, $j = \overline{1, s}$. U prethodnoj relaciji x_j su međusobno različite realne nule polinoma $P_n(x)$, reda m_j , $j = \overline{1, r}$, dok su nule kvadratnih trinoma $x^2 + b_j x + c_j$, $j = \overline{1, s}$, konjugovano-kompleksne nule polinoma $P_n(x)$.

Naći realne nule polinoma je, u opštem slučaju, složen zadatak. Što se tiče racionalnih nula polinoma, uz dodatni uslov da su svi koeficijenti a_j , $j = \overline{0, n}$, celi brojevi, važi sledeće jednostavno tvrđenje.

Stav o racionalnim nulama polinoma. Neka je dat polinom $P_n(x)$ sa celim koeficijentima. Ako je razlomak $\frac{p}{q}$ nula polinoma $P_n(x)$, gde su

$p \in \mathbb{Z}$ i $q \in \mathbb{N}$ relativno prosti brojevi (tj. razlomak $\frac{p}{q}$ se ne može uprostiti), tada je p činilac slobodnog člana a_0 , a q je činilac koeficijenta a_n .

Racionalne funkcije. Funkcija $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, gde su $P_n(x)$ i $Q_m(x)$ polinomi stepena n , odnosno m , naziva se racionalna funkcija. Ako je $m > n$ onda se ona zove prava racionalna funkcija.

Posebno značajni primeri racionalnih funkcija su elementarne racionalne funkcije:

$$\frac{a}{(x - x_0)^j}, \quad a \neq 0, x_0 \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N},$$

i

$$\frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k}, \quad b, c, p, q \in \mathbb{R}, b^2 + c^2 \neq 0, p^2 - 4q < 0, k \in \mathbb{N}.$$

Stav o rastavljanju racionalne funkcije na elementarne. Racionalna funkcija se može na jedinstven način napisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija, i, ako je $n \geq m$, još jednog polinoma stepena $n - m$.

Integraljenje elementarnih racionalnih funkcija. Na osnovu napred rečenog sledi da se integraljenje racionalne funkcije svodi na integraljenje polinoma i elementarnih racionalnih funkcija.

Ako je $P_n(x)$ polinom stepena n , onda je

$$\begin{aligned} \int P_n(x) dx &= \int (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) dx \\ &= a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C. \end{aligned}$$

Što se tiče integrala elementarnih razlomaka oblika $\frac{a}{(x-x_0)^j}$, imamo

$$\begin{aligned} j = 1: \quad & \int \frac{a}{x - x_0} dx = a \ln |x - x_0| + C, \\ j \neq 1: \quad & \int \frac{a}{(x - x_0)^j} dx = \frac{a}{1-j} (x - x_0)^{-j+1} + C. \end{aligned}$$

Da bismo integralili elementarnu racionalnu funkciju oblika $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k}$ razlikovaćemo slučajeve $k = 1$ i $k > 1$.

Za $k = 1$, posle očiglednih transformacija i uvođenja smene $x + \frac{p}{2} = t$,

$dx = dt$, imamo

$$\begin{aligned}
 \int \frac{bx + c}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{bx + c}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx = \int \frac{b\left(t - \frac{p}{2}\right) + c}{t^2 + a^2} dt \\
 &= \frac{b}{2} \int \frac{2tdt}{t^2 + a^2} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2 + a^2} \\
 &= \frac{b}{2} \ln(t^2 + a^2) + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C \\
 &= \frac{b}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2c - bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C
 \end{aligned}$$

($a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$).

Da bismo izračunali integral $I(x) = \int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^k} dx$ za $k \geq 2$, gde, kao i u slučaju $k = 1$, polinom $x^2 + px + q$ nema realnih nula, primenićemo iste transformacije i iste oznake kao i u slučaju $k = 1$:

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int \frac{bx + c}{(x^2 + px + q)^k} dx = \int \frac{bt + \left(c - \frac{bp}{2}\right)}{(t^2 + a^2)^k} dt \\
 &= \frac{b}{2} \int \frac{2tdt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} \\
 &= \frac{b}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}.
 \end{aligned}$$

Označimo integral u izrazu na desnoj strani sa I_k i izrazimo ga kao

$$\begin{aligned}
 I_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt \\
 &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \\
 &= \frac{1}{a^2} I_{k-1} - \frac{1}{a^2} \int t \cdot \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k}.
 \end{aligned}$$

Parcijalnim integraljenjem dobijamo da je

$$\begin{aligned}
 \int t \cdot \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} &= \frac{t}{(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} \\
 &= \frac{t}{(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1-k} I_{k-1}.
 \end{aligned}$$

Konačno je

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}I_{k-1} \quad \text{za } k \geq 2.$$

Dobili smo rekurentnu vezu (formulu) za izračunavanje navedenog integrala. Pošto je

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C,$$

to je

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{I_1}{2a^2} \\ &= \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{t}{a} + C. \end{aligned}$$

Nastavljajući dalje, dobijamo I_3, I_4, \dots i zamjenjujući t i a dobijamo I_k preko prvobitne promenljive x . Sada za polazni integral $I(x)$ imamo formulu

$$I(x) = \frac{b}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}} + \left(c - \frac{bp}{2}\right) I_k.$$

Na osnovu rezultata dobijenih u prethodnom razmatranju možemo formulisati:

Teorema 2. Neodređeni integral proizvoljne racionalne funkcije postoji na svakom intervalu na kom je polinom u imeniocu te racionalne funkcije različit od nule, i može se izraziti kao algebarski zbir polinoma, prave racionalne funkcije, logaritamske funkcije i arkustangensa.

Za ilustraciju postupka nalaženja integrala racionalne funkcije navodimo redosled koraka koje treba učiniti:

(I) ako je potrebno, integrand se izrazi kao zbir polinoma i prave racionalne funkcije;

(II) imenilac (dobijene) prave racionalne funkcije se rastavi na linearne i kvadratne činioce koji nemaju realnih nula;

(III) prava racionalna funkcija se predstavi kao zbir elementarnih racionalnih funkcija;

(IV) integral date funkcije nalazi se kao zbir integrala dobijenih sabiraka.

Integrali oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$, gde je integrand racionalna funkcija po $\sin x$ i $\cos x$.

Smenom $\tan \frac{x}{2} = t$ gde je $-\pi < x < \pi$, polazni integral se svodi na integral racionalne funkcije po t . Zaista,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

gde je $R_1(t)$ racionalna funkcija promenljive t .

Pošto smena $\tan \frac{x}{2} = t$ u većini slučajeva zahteva dosta računanja, navešćemo tri specifična slučaja u kojima se integrali oblika $\int R(\sin x, \cos x) dx$ mogu naći jednostavnijim smenama.

1. Integral oblika $\int R(\sin x) \cos x dx$. Ovde se smenom $\sin x = t$ dobija $\cos x dx = dt$, tako da integral postaje $\int R(t) dt$.

2. Integral oblika $\int R(\cos x) \sin x dx$. Smenom $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ dobijamo integral $\int R(t) dt$.

3. Integral oblika $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx$ gde integrand $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$ sadrži samo parne stepene funkcija $\sin x$ i $\cos x$. Smena $\tan x = t$ daje $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. Kako je

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{i} \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},$$

to je

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t) dt,$$

gde je $R_1(t)$ neka racionalna funkcija po t .

Integrali nekih iracionalnih funkcija

Integrali oblika $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, gde je $m = 2, 3, \dots$, $R(x, y)$ je racionalna funkcija po x i y , $y = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, i koeficijenti a, b, c i d su realni brojevi takvi da je $ad - bc \neq 0$. U slučaju $ad = bc$ imali bismo $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ i $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ tako da bi integrand bio racionalna funkcija samo promenljive x , a integraciju takvih funkcija smo ranije detaljno razmotrili.

Smena $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ daje $t^m = \frac{ax+b}{cx+d}$, tj., $x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$, pa je x racionalna funkcija od t .

Diferenciranjem x po t , dobijamo

$$dx = \frac{dmt^{m-1}(a - ct^m) + cmt^{m-1}(dt^m - b)}{(a - ct^m)^2} dt = \frac{(ad - bc)mt^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt.$$

Prema tome,

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^m - b}{a - ct^m}, t\right) \frac{(ad - bc) mt^{m-1}}{(a - ct^m)^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

gde je $R_1(t)$ racionalna funkcija po t . Ako je $\int R_1(t) dt = F(t) + C$, onda je

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = F\left(\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) + C.$$

Ojlerove smene. Integral oblika $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ se može naći uvodjenjem pogodne smene koja zavisi od koeficijenata a i c i dati integral svodi na integral racionalne funkcije jedne nezavisno promenljive. Ističemo tri slučaja i za svaki od njih smenu kojom se integral navedenog oblika svodi na integral neke racionalne funkcije. Te smene zovu se Ojlerove smene.

I. $a > 0$: smena je $t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$;

II. trinom $ax^2 + bx + c$ ima različite realne nule x_1 i x_2 : smena je $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$ ili $\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_2)t$;

III. $c > 0$: smena je $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c}$ ili $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$.

Svođenje polaznog integrala na oblik $\int R_1(t) dt$ u sva tri slučaja ostavljamo čitaocu.

Navedeni slučajevi pokrivaju sve moguće slučajeve.

Metod Ostrogradskog. Integral oblika

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

gde su $a \neq 0$, b i c dati brojevi, a $p_n(x)$ neki polinom stepena n , možemo naći koristeći sledeću jednakost:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

gde je $q_{n-1}(x)$ polinom stepena $n - 1$ sa neodređenim koeficijentima, a λ konstanta. Koeficijenti polinoma $q_{n-1}(x)$ i konstanta λ se određuju diferenciranjem poslednje jednakosti.

Integral binomnog diferencijala. Integral oblika

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad m, n, p \in \mathbb{Q},$$

može se svesti na integral racionalne funkcije samo u sledeća tri slučaja.

1. Ako je p ceo broj, tada se uvodi smena $t^N = x$, gde je N najmanji zajednički sadržalac imenilaca razlomaka m i n u slučaju da je $p < 0$. Ako je $p > 0$ onda se izraz $(a + bx^n)^p$ razvije po binomnoj formuli.

2. Ako je p racionalan broj i $\frac{m+1}{n}$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = a + bx^n$, gde je s imenilac razlomka p .

3. Ako je p racionalan i $\frac{m+1}{n} + p$ ceo broj, tada se uvodi smena $t^s = ax^{-n} + b$, gde je s imenilac razlomka p .